

Mattis-Bardeen 理論再訪

室谷悠太

2020 年 3 月 6 日

1 Mattis-Bardeen 理論について

金属の光学応答は Drude モデルでよく記述されるが、超伝導体ではどうなるか。これに答えるのが Mattis と Bardeen の理論である [1]。彼らは不純物散乱の影響を取り入れて s 波超伝導体の電磁応答を考察した。BCS 理論 [2] から半年後、Anderson の定理 [3] が示される一年前のことである。

彼らは異常表皮効果^{*1}に興味があったため、原論文では最終的に表皮深さを小さくする極限が取られた。しかし薄膜試料など表皮効果が無視できる場合には、表皮深さではなく不純物濃度が重要なパラメーターとなる。Zimmermann らは準古典 Green 関数法を用いて、任意の不純物濃度に対する s 波超伝導体の光学伝導度を計算した [4]。しかし、実は Mattis-Bardeen の方法でも同じ結果が得られることが分かっている [5]。このことから Zimmermann らの光学伝導度も Mattis-Bardeen モデルと呼ばれ、さまざまな超伝導体試料に適用されている。

本稿の目的は、密度行列を用いて Mattis-Bardeen 理論を再定式化することである。彼らの方法が本質的には密度行列法だというのは当人たちも述べているところだが、原論文では見かけ上 Schrödinger 方程式を解いて波動関数を求める形式が取られた。そのせいで途中式の意味や意図が分かりにくくなっている側面があり、あらわに密度行列を使った方がはるかに見通しがよくなる。密度行列に比べると、Green 関数の方が汎用的ではあるものの、前者には物理的意味が分かりやすいという利点があり、非磁性不純物散乱の効果をより簡単に理解することができるはずである。

2 Anderson の定理

まず「Anderson の定理」と呼ばれるものが理論の出発点となるので、その内容を振り返っておく^{*2}。

電子間引力も不純物散乱も無視できるならば、一電子問題

$$H_0\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

が系を記述する。ここで H_0 は電子に対するハミルトニアン、 $\epsilon_{\mathbf{k}}$ はエネルギー分散関係、 $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$

^{*1} 光の侵入長（表皮深さ）が平均自由行程よりも小さくなること。直感的に言えば、（電子にとって）光の電磁場が一樣とみなせなくなる場合である。誘電体では、同じような状況が長波長近似の破綻に伴い出来る。

^{*2} 既に述べたように、Mattis-Bardeen 理論の方が Anderson の定理より早く出版されている。にもかかわらず、前者は後者を暗に仮定しているように見える。あいにく筆者は当時の状況を知らない。

は固有関数である。しかし不純物が作るポテンシャル H_{imp} があると、一電子問題は

$$(H_0 + H_{\text{imp}}) \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

に置き換わる。なお、ここでは磁性不純物は考えない^{*3}。(2) 式では相変わらず $\mathbf{k}$ が量子数の役割を果たしているが、 H_{imp} は系の並進対称性を破るため、厳密には結晶運動量としての意味を失っている。しかし時間反転対称性は保持されているから、

$$\phi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}), \epsilon_{-\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}, \tilde{\phi}_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}), \tilde{\epsilon}_{-\mathbf{k}} = \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} \quad (3)$$

が成り立つように固有関数を選ぶことができる（クラマース縮退）。

ここで以下の仮定を置こう。

仮定 1
不純物散乱は同じバンドの中でのみ起こる。

このとき異なるバンドのプロッホ状態は混ざらないため、

$$\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

と展開できる^{*4}。正規直交性及び完全性から、展開係数 $a_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ は

$$\sum_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}\mathbf{k}''}^* a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = \sum_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}''\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^* = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (5)$$

を満たす。さらに (3) 式から、

$$a_{(-\mathbf{k})(-\mathbf{k}')} = a_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \quad (6)$$

が得られる。

不純物を含むハミルトニアンを第二量子化すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{el}} &= \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{r} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) (H_0 + H_{\text{imp}}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma} \end{aligned} \quad (7)$$

と対角化することができる。ここで電子の消滅演算子 $\Psi_{\sigma}(\mathbf{r})$ を

$$\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

と展開した。演算子 $c_{\mathbf{k}\sigma}$ 、 $\tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}$ は

$$c_{\mathbf{k}\sigma} = \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{c}_{\mathbf{k}'\sigma} a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \quad (9)$$

という関係によって結ばれている。なお、 σ はスピンを表す。

^{*3} 磁性不純物があると、 H_{imp} は電子のスピンにも作用する。

^{*4} 今は自由電子のバンドしか考えていないため、異なるバンドのプロッホ状態は基底の組 $\{\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\}$ からはみ出している。したがって他のバンドの状態が混成してくると $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ の線形結合で書けなくなる。

ここまでの議論は単に一電子ハミルトニアン $H_0 + H_{\text{imp}}$ を対角化しただけである。そろそろ超伝導状態への影響を調べよう。BCS 理論では、純粋なブロッホ状態の基底で引力相互作用

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -U \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \quad (10)$$

を考える。これを真の固有状態の演算子 $\tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}$ で書き直すと、(5)、(6) 式より

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -U \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \tilde{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \tilde{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \tilde{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \tilde{c}_{\mathbf{k}'\uparrow} \quad (11)$$

となる。これは (10) 式とまったく等価な形である。つまり不純物散乱は BCS 型引力相互作用の形を一切変えない。ここで二つ目の仮定

仮定 2
不純物散乱は状態密度をほとんど変えない。

をおくと、 $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} \simeq \epsilon_{\mathbf{k}}$ となるため、(7) 式は

$$\mathcal{H}_{\text{el}} \simeq \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma} \quad (12)$$

と書き換えられる。(11) と (12) の和

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{\text{el}} + \mathcal{H}_{\text{int}} \quad (13)$$

は不純物がない場合のハミルトニアンと全く等価である。よって

Anderson の定理
s 波超伝導体の転移温度や超伝導ギャップは非磁性不純物の影響を受けない。

が成り立つ [3]。クーパー対が作られるのはフェルミ面近傍だから、実際には仮定 1、2 とともにフェルミ面付近で成り立っていれば十分である。

3 光学遷移

以上のように、平衡状態を記述するハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{el}} + \mathcal{H}_{\text{int}}$ において、非磁性不純物散乱の効果は見かけ上消すことができた。では光との相互作用はどうなるだろうか？ 不純物がない場合、光との結合はパイエルの置き換えによって

$$\mathcal{H}_{\text{el}} \rightarrow \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}-e\mathbf{A}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \quad (14)$$

とすれば取り込むことができる*5。ただし $\mathbf{A}$ は光のベクトルポテンシャルであり、表皮効果を無視して空間的に一様とした*6。簡単のために、次の仮定

*5 パイエルの置き換えが成り立つためには、実はバンド間遷移が無視できるという条件が必要である。すなわち入射光子のエネルギーがバンド間遷移のエネルギーよりも十分低ければ、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 摂動論を使ってパイエルの置き換えが正当化される。これは今の定式化において当然の仮定であり、バンド間遷移が無視できないのならそのバンドをハミルトニアンに追加しなければならないわけである。

*6 長波長近似と言ってもよいのだが、金属中で電磁場が変化するスケールは波長というより侵入長（表皮深さ）だから、こう言ったほうが正確であろう。Mattis-Bardeen が当初考えたように異常表皮効果を調べたければ、 $\mathbf{A}$ の空間依存性を残しておかなければならず、単純なパイエルの置き換えでは扱えなくなる。

仮定 3

エネルギー分散関係は等方的な有効質量近似でよく表される。

をおくと、(14) 式は

$$\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \quad (15)$$

と置き換えることと等価である。ここでエネルギー分散関係を

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \quad (16)$$

と書き、

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(-\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} \right) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \quad (17)$$

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(\frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m} \right) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \quad (18)$$

とおいた。 m は有効質量、 μ は化学ポテンシャルであり、換算プランク定数は $\hbar = 1$ とした。

再び不純物を入れてみよう。(15) 式右辺の $\mathcal{H}_0$ については前節で見た。 $\mathcal{H}_2$ に関しては、(5)、(9) 式を使うことで

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(\frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m} \right) \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma} \quad (19)$$

が得られる。つまり $\mathcal{H}_0$ 、 $\mathcal{H}_2$ ともに不純物散乱の影響はほとんど受けない。ところが $\mathcal{H}_1$ への影響は大きく、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma} (\mathbf{J}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{A}) \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{k}'\sigma} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{e\mathbf{p}}{m} \right) a_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (20)$$

という形になる [6]。 $\mathbf{J}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ は電流演算子の行列要素という意味を持つ。(17) 式にはなかった非対角行列要素が生じたことから、異なる量子数 $\mathbf{k}$ を持つ状態間の光学遷移が可能になったことが分かる。つまり不純物散乱は電子の光学遷移を媒介する。

具体的な $\mathbf{J}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ の形はどのように決めればよいだろうか？ 線形応答で実際に必要になるのは遷移行列要素

$$J_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^i J_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^j = \left(\frac{e\hbar}{m} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} p_i q_j (a_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}\mathbf{q}}) \quad (21)$$

である（次元を明確にするために、以下 $\hbar$ をあらわに書く）。グリーン関数法でよく行われるように、不純物のランダムな分布について上式を平均化することを考えよう。これは $a_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ の位相について積分するような操作を含むため、それによって消えない $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ の成分が主な寄与となる。また巨視的に見て系は回転対称性を回復するため^{*7}、 $i = j$ の対角成分のみが残り

$$J_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^i J_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^j = \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{e\hbar}{m} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}} p^2 |a_{\mathbf{k}\mathbf{p}}|^2 |a_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}|^2 \quad (22)$$

^{*7} 回転対称性を「回復」と言っているのは、もともと (16) 式が妥当で、実効的に回転対称性を持つ場合を考えているためである。

となる*8。最終的には、さらに $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の方位角について平均化した

$$\begin{aligned} |M_{kk'}^{ij}|^2 &\equiv \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} J_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^i J_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^j \\ &= \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{e\hbar}{m} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}} p^2 w_{\mathbf{k}\mathbf{p}} w_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (23)$$

が分かれば十分である。したがって関数

$$w_{\mathbf{k}\mathbf{p}} = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} |a_{\mathbf{k}\mathbf{p}}|^2 \quad (24)$$

を決めればよい。天下りだが、フェルミ面近傍の $\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{p}$ に対して

$$w_{\mathbf{k}\mathbf{p}} = \frac{1}{\pi N(0)} \frac{\hbar\gamma/2}{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{p}})^2 + (\hbar\gamma/2)^2} \quad (25)$$

という形を考えてみよう。ここで $N(0) = Vmk_F/2\pi^2\hbar^2$ はフェルミ面におけるスピン当たりの状態密度、 V は系の体積、 k_F はフェルミ波数である。 $\hbar\gamma$ の意味は後で述べるが、フェルミエネルギー $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/2m$ よりも十分小さいとする。このとき

$$\sum_{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \simeq N(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}\mathbf{p}} = 1 \quad (26)$$

となり、(5) 式と矛盾しない。さて、フェルミ面付近の $\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{k}'$ に対して (23) 式を計算すると

$$\begin{aligned} |M_{kk'}^{ij}|^2 &\simeq \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{e\hbar}{m} \right)^2 N(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_{\mathbf{p}} k_F^2 w_{\mathbf{k}\mathbf{p}} w_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} \\ &= \frac{(ev_F)^2}{3N(0)} W(\epsilon_{\mathbf{k}}, \epsilon_{\mathbf{k}'}) \end{aligned} \quad (27)$$

ただし

$$W(\epsilon, \epsilon') = \frac{1}{\pi} \frac{\hbar\gamma}{(\epsilon - \epsilon')^2 + (\hbar\gamma)^2} \quad (28)$$

が得られる。以下の章で示すように、これは通常状態において寿命 γ^{-1} のドルーデモデルに帰着するから、 γ は電子の散乱レートと解釈される。ここでは (25) 式の代わりに (27) 式を仮定として選び、

仮定 4

光学遷移はフェルミ面近傍でのみ起こり、遷移行列要素 (27) に従う。

と表現しておく。既に述べたことだが、前半部分を数学的に表せば $\hbar\gamma \ll \epsilon_F$ となる。

(25) 式が何を意味するのかについて、Mattis-Bardeen の議論と結びつけるべく、相関関数

$$\rho_k(\mathbf{R}) = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \quad (29)$$

を計算してみよう。ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ である。ランダムな不純物の分布について平均をとると、

$$\rho_k(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{p}} w_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}') \quad (30)$$

*8 このような粗視化が有効でない場合には、例えば文献 [7] で論じられているように、特異な光学応答が出現する可能性がある。

が得られる。ブロッホ状態を平面波で近似し $\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}/\sqrt{V}$ とおくと、 $k \simeq k_F$ に対し

$$\begin{aligned}
\rho_k(\mathbf{R}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{N(0)} \frac{\hbar\gamma/2\pi}{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{p}})^2 + (\hbar\gamma/2)^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \\
&\simeq \frac{1}{(2\pi)^3 N(0)} \int_0^\infty p^2 dp \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\hbar\gamma/2\pi}{(\hbar v_F)^2 (k-p)^2 + (\hbar\gamma/2)^2} e^{-ipR\cos\theta} \\
&\simeq \frac{1}{2\pi^2 N(0)R} \int_{-\infty}^\infty dp \, p \sin pR \frac{\hbar\gamma/2\pi}{(\hbar v_F)^2 (k-p)^2 + (\hbar\gamma/2)^2} \\
&= \frac{1}{V} \frac{1}{2ik_F^2 R} \left[\left(k + \frac{i}{2l}\right) e^{ikR} - \left(k - \frac{i}{2l}\right) e^{-ikR} \right] e^{-R/2l} \\
&\simeq \frac{1}{V} \frac{\sin kR}{kR} e^{-R/2l}
\end{aligned} \tag{31}$$

が得られる。一行目から二行目への式変形では $\epsilon_{\mathbf{k}} \simeq \hbar v_F (k - k_F)$ を使い、二行目から三行目では積分区間の下限を $-\infty$ に拡張し、三行目から四行目では極 $p = k \pm i/2l$ における留数積分を行った。また、最後の行に移るときは $k \simeq k_F \gg l^{-1}$ であることを使った。ただし $v_F = \hbar k_F/m$ はフェルミ速度、 $l = v_F \gamma^{-1}$ は平均自由行程である。(31) 式は Mattis-Bardeen が出発点とした式に他ならない [原論文の (2.6) 式]。我々は (25) 式を出発点にしたが、 $w_{\mathbf{k}\mathbf{p}}$ と $\rho_k(\mathbf{R})$ は互いのフーリエ変換になっているから [(30) 式を参照]、両者は等価な枠組みを与えているのだ。実際、(31) 式を遷移行列要素の定義

$$|M_{kk'}^{ii}|^2 = V \frac{e^2}{m^2} \int d^3\mathbf{R} \frac{\partial \rho_k(\mathbf{R})}{\partial R_i} \frac{\partial \rho_{k'}(\mathbf{R})}{\partial R_i} \tag{32}$$

に代入すれば、(27) 式を再び得ることができる*9。原論文では書き下されなかったが、(27) 式の遷移行列要素こそが Mattis-Bardeen 理論の要と言える。

本節の最後に、グリーン関数を求めることによって間接的に (25) 式を正当化しておこう。一粒子遅延グリーン関数を

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3\mathbf{r} \, \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \frac{1}{\hbar(\omega + i\delta) - H_0} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \tag{33}$$

と定義する。(4) 式の逆変換

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^* \tilde{\phi}_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) \tag{34}$$

より、 $k \simeq k_F$ に対して

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_{\mathbf{k}'} \frac{|a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2}{\hbar(\omega + i\delta) - \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}'}} \\
&\simeq \sum_{\mathbf{k}'} \frac{w_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}}{\hbar(\omega + i\delta) - \epsilon_{\mathbf{k}'}} \\
&\simeq \int_{-\infty}^\infty d\epsilon_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\hbar(\omega + i\delta) - \epsilon_{\mathbf{k}'}} \frac{\hbar\gamma/2\pi}{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}'})^2 + (\hbar\gamma/2)^2} \\
&= \frac{1}{\hbar\omega - \epsilon_{\mathbf{k}} + i\hbar\gamma/2}
\end{aligned} \tag{35}$$

が得られる。これは寿命を持つ準粒子のグリーン関数としてよく知られた形をしている [8]。よって、(25) 式に立脚した理論は、不純物散乱による準粒子の寿命を初めから取り込んでいる。

*9 詳しくは文献 [6] の Appendix A を参照。

4 準粒子基底の密度行列

煩雑さを避け、以下では $\tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}$ のチルダを外して $c_{\mathbf{k}\sigma}$ と書く。この場合、ハミルトニアン各项を書き下すと

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} - U \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \quad (36)$$

$$\mathcal{H}_1 = - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma} (\mathbf{J}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{A}) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}'\sigma} \quad (37)$$

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(\frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m} \right) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \quad (38)$$

となる。 $\mathcal{H}_0$ は通常の BCS 理論と同じように平均場近似によって扱うことができる。

以下近日更新予定 (2020/03/06)。

参考文献

- [1] D. C. Mattis and J. Bardeen, “Theory of the Anomalous Skin Effect in Normal and Superconducting Metals,” *Phys. Rev.* **111**, 412 (1958).
- [2] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Theory of Superconductivity,” *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [3] P. W. Anderson, “Theory of dirty superconductors,” *J. Phys. Chem. Solids* **11**, 26 (1959).
- [4] W. Zimmermann, E. H. Brandt, M. Bauer, E. Seider, and L. Genzel, “Optical conductivity of BCS superconductors with arbitrary purity,” *Physica C* **183**, 11 (1991).
- [5] A. J. Berlinsky, C. Kallin, G. Rose, and A.-C. Shi, “Two-fluid interpretation of the conductivity of clean BCS superconductors,” *Phys. Rev. B* **48**, 4074 (1993).
- [6] Y. Murotani and R. Shimano, “Nonlinear optical response of collective modes in multi-band superconductors assisted by nonmagnetic impurities,” *Phys. Rev. B* **99**, 224510 (2019).
- [7] T. Cea, D. Bucheli, G. Seibold, L. Benfatto, J. Lorenzana, and C. Castellani, “Optical excitation of phase modes in strongly disordered superconductors,” *Phys. Rev. B* **89**, 174506 (2014).
- [8] 例えば P. Coleman, *Introduction to Many-Body Physics* (Cambridge University Press, 2015).